Title	点に容量を持つ無向ネットワークのフロー飽和実現について(数理モデルの解析における組合せ論的様相)
Author(s)	金子, 美博; 篠田, 庄司; 堀内, 和夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 802: 1-6
Issue Date	1992-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/82883
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
802巻 1992年 1-6

点に容量を持つ無向ネットワークのフロー飽和実現について

On Realization of Flow-Saturation in an Undirected Vertex Capacitated Network

早稲田大学　金子美博 (Yoshihiro KANEKO)
中央大学　篠田庄司 (Shoji SHINODA)
早稲田大学　堀内和夫 (Kazuo HORIUCHI)

1. まえがき

本報告では，点が有限容量を持ち，枝が無限容量を持つ無向なﾈｯﾄﾜｰｸに対する，最小本数の枝付加によるﾌﾛｰ飽和実現という問題を提起する．考察の結果，そのようなﾌﾛｰ飽和実現のためには，定義する真極大点の点対に限って枝を付加することを，考えれば十分であることを示すと共に，ﾌﾛｰ飽和実現のために必要な枝の最小本数Ωは，ﾈｯﾄﾜｰｸ上の真極大点の個数hを用いて，$1 \leqq \Omega \leqq h-1$であることも示す．尚，命題の中には，証明を紙面の都合上省いたものもあり，これについては，別の機会に譲る．

2. 準備

考察の対象とするﾈｯﾄﾜｰｸNは，各点に正の有限容量，各枝に正の無限容量の重みを持ち，N=(V(N), E(N), C)で表され，V(N)及びE(N)は，それぞれNの点集合及び枝集合を表す．Nは無向連結で自己閉路も多重枝も含まない単純ｸﾞﾗﾌの構造とする．CはV(N)上で定義され，正の有限な実数値をとる関数であり，点vの容量はC(v)で表される．以下単にﾈｯﾄﾜｰｸと言えば，点に有限容量，枝に無限容量の重みを持つ無向ﾈｯﾄﾜｰｸを指し，枝と言えば，容量が無限大の無向枝を指すものとする．ﾈｯﾄﾜｰｸNが無向であるため，点対は全て非順序点対である．点集合Uに対して，Uの容量C(U)は，Uに属する全ての点の容量の総和を表す．N上の点集合Uに対して，N-Uは，Uに属する全ての点をNから除去したﾈｯﾄﾜｰｸを表す．N上の点対集合Aに対して，N+Aは，A上の全ての点対に枝を付加したﾈｯﾄﾜｰｸを指す．N上のx-y点ｶｯﾄｾｯﾄとは，N-Kにおいて，点xと点yとが異なる連結成分に属するような点集合Kである．N上のx-y点ｶｯﾄｾｯﾄで，容量が最小となるものの値を$s_N(x,y)$[1]で表す．但しxとyが隣接するならば，$s_N(x,y)=\infty$とする．N上の2点間の最大ﾌﾛｰ値を次のように定義し，その値を基に，Nにおける飽和点対及び不飽和点対を定義する．

［定義１］　ﾈｯﾄﾜｰｸN上の2点x, y間の最大ﾌﾛｰ値f_Nを

$$f_N(x,y) = \min\{C(x), s_N(x,y), C(y)\} \quad (x \neq y) \qquad (1)$$

$$f_N(x,y) = \infty \quad (x = y) \qquad (2)$$

とする．N上のある点xに対して，

$$f_N(x, y) < \min\{C(x), C(y)\} \tag{3}$$

となる点yがN上に存在するならば，Nにおいて点xは不飽和点であると呼び，N上の不飽和点の集合をU(N)で表す．式(3)を満たす点対(x, y)をN上の不飽和点対と呼び，その集合をUV(N)で表す．x以外の任意の点yに対して，

$$f_N(x, y) = \min\{C(x), C(y)\} \tag{4}$$

が成り立つならば，点xをN上の飽和点と呼び，式(4)を満足する点対(x, y)を，N上の飽和点対と呼ぶ．Nにおける飽和点及び飽和点対の集合をそれぞれS(N)及びSV(N)で表す． □

飽和点対及び不飽和点対を用いて，ﾌﾛｰ飽和実現を定義する．

[定義２] 不飽和点が存在するﾈｯﾄﾜｰｸをﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸと呼び，そうでないﾈｯﾄﾜｰｸをﾌﾛｰ飽和なﾈｯﾄﾜｰｸと呼ぶ．ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸ上の何組かの点対に，枝を付加して，ﾌﾛｰ飽和なﾈｯﾄﾜｰｸに変化させることをﾌﾛｰ飽和実現と呼ぶ．□

本報告では，与えられたﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸに対して，最小本数の枝を付加して，ﾌﾛｰ飽和を実現する問題を考える．この問題は，既に知られているｸﾞﾗﾌの辺(本報告では，枝と呼んでいる)付加問題の一種である．

[辺付加問題][2],[3] 初期ｸﾞﾗﾌ$G_\emptyset=(V_\emptyset, E_\emptyset)$とｺｽﾄ関数$c:V_\emptyset \times V_\emptyset \to Z^+$(非負整数)が与えられているとき，ｸﾞﾗﾌ$G=G_\emptyset+A$が，性質π(ｸﾞﾗﾌに関する一つの性質で，単調性を有するもの)を満たし，ｺｽﾄ総和c(A)が最小となる辺集合Aを求めよ．□

ﾌﾛｰ飽和実現の問題において，(1)ﾌﾛｰ飽和なﾈｯﾄﾜｰｸに対して，どのように枝を付加しても，ﾌﾛｰ飽和のままであること，及び(2)任意のﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸに対して，ｸﾞﾗﾌ構造が完全ｸﾞﾗﾌとなるように枝を付加すれば，ﾌﾛｰ飽和が実現できること，が辺付加問題としての，性質πに相当する．

ﾈｯﾄﾜｰｸ上の不飽和点に対して，極大点を以下のように定義する．

[定義３] ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の不飽和点の集合U(N)において，ある不飽和点αが，(Ⅰ)α以外のU(N)上の任意の点βに対して，(α, β)∈UV(N)であるか，または，(Ⅱ)α以外のU(N)上の点βで，(α, β)∈SV(N)を満たすもの全てに対して，$f_N(\alpha, \beta)=C(\beta)$であるならば，Nにおいてαは極大(である)点と呼ばれる．N上の極大点及び極大点の点対の集合をそれぞれP(N)及びPV(N)で表す．□

ﾈｯﾄﾜｰｸN上の極大点の点対は必ずしも不飽和点対になるとは限らない．次の補題は，N上で飽和点対である2個の極大点の性質を示すものである．

[補題１] ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の相異なる2つの極大点α_p, β_pに対して，

$(\alpha_p, \beta_p) \in SV(N)$ならば，$C(\alpha_p)=C(\beta_p)$である．□

[定義４]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の極大点の点対の集合PV(N)に対して，$PV(N)\cap SV(N)\neq\phi$ならば，P(N)の部分集合$\widetilde{P}(N)$が，任意の$\alpha' \in P(N)\setminus\widetilde{P}(N)$に対して，$(\alpha', \alpha)\in SV(N)$なる$\alpha$を要素として持っている，極小な極大点の集合ならば，$\widetilde{P}(N)$を真極大点集合と呼び，$\widetilde{P}(N)$上の点を真極大点と呼ぶ．また，$PV(N)\cap SV(N)=\phi$ならば，P(N)自身が真極大点集合であり，P(N)上の任意の点が真極大点であると呼ばれる．N上の真極大点の点対の集合を$\widetilde{PV}(N)$で表す．□

補題１を用いて次の命題が成り立つことが証明できる．

[命題１]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の不飽和点対の集合UV(N)と真極大点の点対集合$\widetilde{PV}(N)$に対して，$UV(N)\supseteq\widetilde{PV}(N)$である．□

3．枝付加とﾌﾛｰ飽和実現

ここでは，ﾈｯﾄﾜｰｸN上の点対集合Aによる影響点対集合を定義し，最小本数の枝付加とﾌﾛｰ飽和実現について考える．

[定義５]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の点対集合Aに対して，NにおけるAによる影響点対集合とは，N+A上で飽和点対となるN上の不飽和点対の集合であり，I(N:A)で表す．即ち，$I(N:A)=\{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta)\in UV(N), (\alpha, \beta)\in SV(N+A)\}$である．Aが唯1個の点対(x, y)からなるとき，簡単のため，I(N:x, y)で表す．□

ﾌﾛｰ飽和実現の問題とは，与えられたﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸNに対して，I(N:A)=UV(N)となるN上の点対集合Aを求める問題であると言える．影響点対集合に関して，以下の命題が成り立つことが証明できた．

[補題２][6]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の任意の点対(x, y)に対して，$I(N:x, y)\subseteq I(N:\alpha, \beta)\subseteq I(N:\alpha_p, \beta_p)$を満たす不飽和点対$(\alpha, \beta)$及び2個の真極大点$\alpha_p$及び$\beta_p$がN上に存在する．□

[補題３]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN及びN上の点対集合Aに対して，$(\alpha, \beta)\in UV(N+A)$ならば，$(\alpha, \beta)\in UV(N)$であり，$\alpha_p\in\widetilde{P}(N+A)$ならば，$\alpha_p\in\widetilde{P}(N)$である．□

[命題２][6]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸNに対して，N+Aがﾌﾛｰ飽和であるm組の点対の集合AがN上に存在するならば，$N+A_p$がﾌﾛｰ飽和となるm組の<u>真極大点</u>の点対の集合A_pがN上に必ず存在する．

(証明)　題意を満たすN上の点対の集合を$A=\{(x_j, y_j) \mid j=1, 2, \cdots, m\}$とする．ここで，m-1個の点対の集合$A_{m-1}=A\setminus\{(x_1, y_1)\}$を考える．

(Ｉ)$N+A_{m-1}$がﾌﾛｰ飽和ならば，$\widetilde{P}(N)$における任意の真極大点α_p及びβ_pに対し

て，$A_{m-1}+\{(\alpha_p, \beta_p)\}$はﾌﾛｰ飽和である．

(Ⅱ)$N+A_{m-1}$がﾌﾛｰ不飽和ならば，補題２より$I(N+A_{m-1}:x, y)\subseteq I(N+A_{m-1}:\alpha_p, \beta_p)$を満たす真極大点$\alpha_p$及び$\beta_p$が$N+A_{m-1}$上に存在する．補題３より，$\alpha_p$及び$\beta_p$はN上でも真極大点である．よって，(Ⅰ)，(Ⅱ)のどちらの場合も$N+\{A\setminus\{(x_1, y_1)\}\cup\{(\alpha_p, \beta_p)\}\}$は，ﾌﾛｰ飽和であり，$\{A\setminus\{(x_1, y_1)\}\cup\{(\alpha_p, \beta_p)\}\}$はN上の真極大点の点対を少なくとも1組持つ点対集合である．

以上の操作を高々m回繰り返せば，$N+A_p$がフロー飽和となるm組の真極大点の点対の集合A_pがN上に存在することが示される．□

この命題より，ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸNのﾌﾛｰ飽和実現は，枝を付加すべき点対を，N上の真極大点の点対に限って考えれば十分であることがわかる．

4.最小数枝付加によるﾌﾛｰ飽和実現の方法

前節の命題２を基に，一つの随伴ｸﾞﾗﾌを定義し，最小本数の枝付加でﾌﾛｰ飽和実現を考え，そのような枝を付加すべき点対を求めるｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを提案する．

[定義６]　ﾈｯﾄﾜｰｸN上の真極大点の点対集合$\widetilde{PV}(N)$に対する，不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌ$G(\widetilde{PV}(N))$とは，$\widetilde{PV}(N)$上の点対を枝とする枝ｾｸｼｮﾝｸﾞﾗﾌである．□

命題1より，この随伴ｸﾞﾗﾌは完全ｸﾞﾗﾌの構造になる．

[命題３]　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN上の真極大点の集合$\widetilde{P}(N)$及び$C(v_M)=\max\{C(v)\mid v\in\widetilde{P}(N)\}$である真極大点$v_M\in\widetilde{P}(N)$に対して，$|\widetilde{P}(N)|-1$個の点対$(v_M, v)\ (\in\widetilde{PV}(N))$に枝を付加したﾈｯﾄﾜｰｸは，ﾌﾛｰ飽和である．□

[命題４]　ﾌﾛｰ飽和実現のために必要な付加枝の最小本数Ωは，完全ｸﾞﾗﾌ構造である随伴ｸﾞﾗﾌ$G(\widetilde{P}(N))$上の点数hを用いて，$1\leqq\Omega\leqq h-1$になる．□

以上を基に，ﾌﾛｰ飽和実現において，付加すべき枝が最小本数となる点対を求める，簡単なｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを以下で述べる．

ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑ

step1　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸNに対して，不飽和点対UV(N)を求め，UV(N)から，極大点の集合P(N)を求める．更に，P(N)から真極大点の集合$\widetilde{P}(N)$を決めて，不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌ$G(\widetilde{PV}(N))$を作る．

step2　$i\leftarrow 1$.

step3　$i=|\widetilde{P}(N)|-1$ならば，V(N)上で容量が最も大きな点であるv_Mに対して，$|\widetilde{P}(N)|-1$個の点対$(v_M, v)\ (\in\widetilde{PV}(N))$をoutputし，終了．

step4 $G(\widetilde{PV}(N))$上のi組の真極大点の点対の集合を$E(i)$とし，$G(N)$上の全ての$E(i)$に対して，$I(N:E(i))$を調べる．$I(N:E(i))=UV(N)$となる$E(i)$が存在すれば，$E(i)$をoutputし，終了．全ての$E(i)$に対して，$I(N:E(i))\subset UV(N)$ならば，$i\leftarrow i+1$として，step3へ．□

5．数値例

図1のﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN_aに対応する，不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌは図2のようになる．図1における数値は，各点及び各枝の容量を表す．N_aに対して，1本の枝付加でﾌﾛｰ飽和は実現できないが，2本の枝付加では，例えば，$I(N_a:\{(v_1,v_3),(v_1,v_4)\})=\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_2,v_3),(v_2,v_4),(v_3,v_4)\}$のように，ﾌﾛｰ飽和が実現できる．このﾈｯﾄﾜｰｸは，命題４において，$\ell=h-1$の例である．

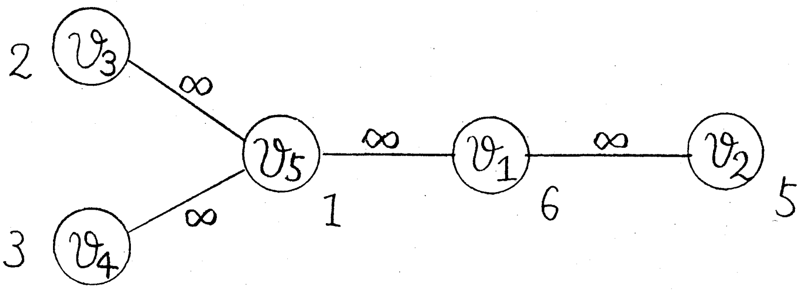

図１　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN_a

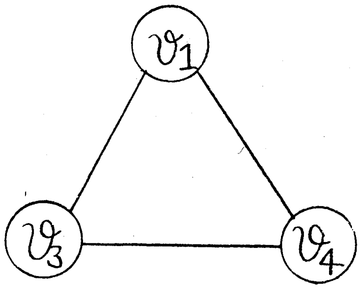

図２　N_aに対する，不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌ

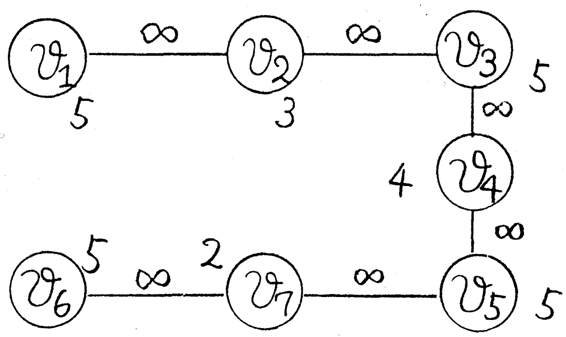

図３　ﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN_b

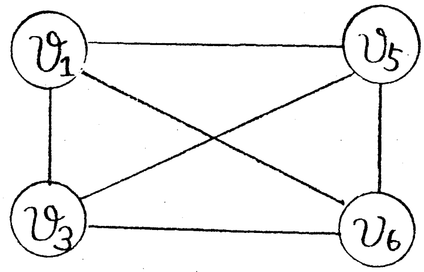

図４　N_bに対する，不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌ

また図３のﾌﾛｰ不飽和なﾈｯﾄﾜｰｸN_bにおいて，$UV(N_b)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$であり，その中で極大点の集合は$\{v_1, v_3, v_5, v_6\}$であり，これが真極大点の集合でもある．不飽和に関する随伴ｸﾞﾗﾌは図４のようになり，$N_b+\{(v_1, v_6)\}$がﾌﾛｰ飽和になることが簡単な計算によって確かめられる．この例は，命題４において，$\Omega=1$の場合である．

6.まとめ

本報告では，点に有限な容量が重みづけされた無向なﾈｯﾄﾜｰｸの，ﾌﾛｰ飽和実現という問題を提起し，最小本数の枝を付加してﾌﾛｰ飽和を実現するためには，定義した真極大点の点対への枝付加を考えれば十分であることを示した．また，定義した随伴ｸﾞﾗﾌを用いて，ﾌﾛｰ飽和実現のために，最小本数の枝を付加すべき点対を，決定する一つのｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑを提案した．今後の課題として，本報告の問題がNP完全問題になるかどうかを調べることが興味ある問題である．

文献

(1)竹内，守島，“ﾈｯﾄﾜｰｸの2点を分離する最小点ｶｯﾄを用いた中心度関数”，信学論(A)，J70-A，4，pp.625-633(1987.4)

(2)K.P.Eswaran & R.E.Tarjan, “Augmentation problems”，SIAM J. Comput.，5，653-665(1976)

(3)渡辺，東，中村，“耐故障ﾈｯﾄﾜｰｸと辺付加問題”，京都大学数理解析研究所講究録，695(計算ｱﾙｺﾞﾘｽﾞﾑと計算量の基礎理論)，215-224(1989.6)

(4)渡辺，東，中村，“ｸﾞﾗﾌの辺付加問題による耐故障ﾈｯﾄﾜｰｸの構成”，信学論(A)，J73-A，7，1242-1254(1990.7)

(5)伊理，白川，梶谷，篠田ほか：演習ｸﾞﾗﾌ理論-基礎と応用-，ｺﾛﾅ社(1983)

(6)Kaneko, Shinoda, Horiuchi “On a Realization of Flow-Saturation by Adding Edges in an Undirected Vertex-Capacitated Network”，IEICE, Trans.E (投稿中)